Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Christoph Brackenhofer

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2022/2023

Algebra und Zahlentheorie
Blatt 12
Letztes Blatt!
Abgabe: 07.02.2023, 14 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**
Sei $P(T) = T^5 - aT + b$ mit $a > 0$ und b reellen Zahlen. Zeige, dass $P(T)$ mindestens eine und höchstens drei reelle Nullstellen besitzt.

Schließe mit elementaren analytischen Methoden, dass das Polynom $P(T) = T^5 - 4T + 1$ genau drei reelle Nullstellen besitzt. Begründe, dass dieses Polynom irreduzibel in $\mathbb{Q}[T]$ ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.**
Seien Elemente a und b aus einem algebraischen Abschluss $\overline{k}$ eines Körpers k derart, dass a und b jeweils in Radikalerweiterungen $k \subset K_a \subset \overline{k}$ und $k \subset K_b \subset \overline{k}$ liegen. Zeige, dass auch der Zwischenkörper $k(a, b)$ in einer Radikalerweiterung von k liegt.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.**
Mit Hilfe der trigonomischen Identitäten für $\cos(\alpha + \beta)$ und $\sin(\alpha + \beta)$ finde eine nichttriviale polynomiale Gleichung $P(\cos(\theta), \cos(\frac{\theta}{3})) = 0$ mit ganzzahligen Koeffizienten.

Schließe daraus, dass die Dreiteilung des konstruktiblen Winkels 60° mit Zirkel und Lineal nicht durchgeführt werden kann.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.**

(a) Sei p eine Primzahl sowie $P(T)$ eine Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Zeige, dass $P(T^p)$ und $P(T)^p$ kongruent modulo p sind.

(b) Seien $P(T)$ und $Q(T)$ Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten derart, dass der konstante Term von $Q(T)$ entweder 1 oder -1 ist. Falls $P(T) = Q(T) \cdot R(T)$ mit $R(T)$ aus $\mathbb{Q}[T]$, zeige, dass die Koeffizienten von $R(T)$ alle in $\mathbb{Z}$ liegen.

(c) Sei nun $Q(T)$ ein separables Polynom sowie $P(T)$ ein Polynom über demselben Körper k derart, dass jede Nullstelle von $Q(T)$ (in einem algebraischen Abschluss von k) eine Nullstelle von $P(T)$ ist. Zeige, dass $Q(T)$ das Polynom $P(T)$ im Polynomring $k[T]$ teilt.

(d) Definiere für $n \geq 1$ aus $\mathbb{N}$ das Polynom

$$P_n(T) = \prod_{\substack{k \in \{1,\dots,n\},\\ \mathrm{ggT}(k,n)=1}} (T - \zeta_n^k),$$

wobei ζ_n eine primitive n-te Einheitswurzel in einem algebraischen Abschluss $\mathbb{Q}^{alg}$ von $\mathbb{Q}$ ist. Gib explizit alle Koeffizienten des Polynoms $P_j(T)$ für $j = 2 \leq j \leq 4$ an.

(Bitte wenden!)

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach im Keller des mathematischen Instituts.

(e) Zeige induktiv über n, dass für $n \geq 2$ das Polynom $P_n(T)$ konstanten Term 1 und ganzzahlige Koeffizienten besitzt.

HINWEIS: Was sind die Nullstellen von $T^n - 1$?

(f) Gib explizit das Polynom $P_6(T)$ an. Was ist sein Grad?

(g) Wir nehmen nun an, dass $P_n(T)$ einen irreduziblen Faktor $F(T)$ derart besitzt, dass $F(\omega^p) = 0$ für jede Nullstelle ω von $F(T)$ (in einem algebraischen Abschluss $\mathbb{Q}^{alg}$ von $\mathbb{Q}$) und jede Primzahl p, welche n nicht teilt. Zeige unter dieser Annahme, dass $P_n(T)$ irreduzibel ist.